Лекция 2_ЖСТдағы айналмалы денелердің ілгерімелі қозғалысы есебі теңдеуін орташалау әдісі туралы

ЖСТ аясында маңызды тақырып, яғни айналмалы денелердің ілгерілемелі қозғалысының теңдеуін орташалау әдісін қарастырамыз.

ЖСТ – физиканың іргелі теориясы және бұл гравитациялық және денелердің гравитациялық өрістердегі қозғалысын сипаттайтын теория екенін тағы да еске сала кетеміз. ЖСТ күшті гравитациялық өрістерде, мысалы, Жер өрісінде немесе қара құрдымдар мен нейтрондық жұлдыздардың жанындағы өрістерде классикалық Ньютон механикасына ауыстыра алады.

Неліктен орташалау әдісін қарастырамыз? ЖСТ да денелер классикалық механикадағыдай түзу сызықтар бойымен ғана емес, сонымен қатар гравитация әсерінен кеңістік-уақыттың қисаюынан қисық траекториялар бойымен қозғала алады. Сонымен, жалпы салыстырмалылық шеңберінде айналмалы денелердің қозғалыс теңдеулерін жеңілдетуге мүмкіндік беретін математикалық әдіс. Ол дененің негізгі қозғалысын бөліп көрсетуге және оның айналасындағы кеңістік-уақыттың қисаюын есепке алуға мүмкіндік береді.

Лензе -Тирринг есебінің қозғалыс теңдеулерін қайта жазайық

$$\dot{\vec{M}} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\left[\vec{S}_0\vec{M}\right] - \frac{12\gamma m}{7m_0 c^2 r^5}(\vec{S}_0\vec{r})\left[\vec{r}\vec{S}_0\right], \tag{1}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left(4E + 6mU + \frac{m\xi_o}{m_o}\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2} + \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\left[\vec{S}_o\vec{A}\right] + \frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{mc^2 r^5} -$$
$$- \frac{6\gamma}{7m_o c^2 r^5}\left\{S_o^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - \frac{5}{r^2}\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] + 2\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)\left[\vec{S}_o\vec{M}\right] + 2\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]\right]\right\}; \tag{2}$$

Ньютон эллипсі бойынша (1) және (2)-ні орташалаймыз. [3, б. 426] жұмыстарда орташалауды эллиптикалық орбита бойынша қозғалу кезінде уақытқа тәуелділіктің параметрлік көрінісі арқылы жасауға ыңғайлы екенін көрсетеді

$$r = a\left(1 - e\cos\xi\right),\ t = \frac{T}{2\pi}\left(\xi - e\sin\xi\right). \tag{3}$$

Мысалы:

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1-e\cos\xi)^2} \quad . \tag{4}$$

Осы және оған ұқсас интегралдарды есептеу үшін біз жалпы формуланы қолданамыз [17, с.397]

$$J_{n+1} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1-e\cos\xi)^{n+1}} = \frac{2\pi}{\left(1-e^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right), \tag{5}$$

мұндағы P_n - Легендра көпмүшелері. Және

$$P_0(x)=1,\, P_1(x)=x\,,\, P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\, P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),\ldots \tag{6}$$

(5) формуланы есепке ала отырып, табамыз

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}} \quad . \tag{7}$$

Орташаландыруды қозғалыс моментін сақтаудың релятивистік емес заңын қолдануға негізделген одан да қарапайым түрде жүргізуге болады. Қозғалыс моменті үшін өрнекті жазайық

$$M = mr^2\dot{\varphi} \tag{8}$$

Осыдан

$$dt = \frac{mr^2}{M}d\varphi \quad . \tag{9}$$

Сондықтан орташалау кезінде t интеграциясынан φ интеграциясына ауысуға болады. Тағы да $\frac{1}{r^3}$ ден орташа мәнді қарастырыңыз. Онда,

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r} = \frac{m}{TMp}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\varphi)d\varphi \tag{10}$$

Бұл интеграл қарапайым және оны есептеу үшін (5) типті арнайы формуланың қажеті жоқ. Келесі,

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{m}{TMp}2\pi\,. \tag{11}$$

Бұл өрнек (6) сәйкес келуі үшін, Кеплер мәселесіне сәйкес екенін есте сақтаңыз

$$TM = 2mf\ , f = \pi ab\ , b = a\sqrt{1-e^2}\ , p = a\left(1-e^2\right)\ , \tag{12}$$

тағы бір еске сала кетейік, f-орбитаның ауданы, b-эллипстің кіші жартылай осі. Содан кейін

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{\pi}{fp} = \frac{1}{abp} = \frac{1}{a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\ . \tag{13}$$

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = 0\ , \overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} = \frac{e}{2a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\vec{i}\ . \tag{14}$$

Соңында,

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^5}} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_r d\varphi}{r^2} = \frac{2\pi me}{TMp^2}\vec{i} = \frac{e}{a^4\left(1-e^2\right)^{5/2}}\vec{i}\ . \tag{15}$$

$$\overline{\frac{\vec{r}\left(\vec{r}\,\vec{S}_0\right)}{r^5}} = \frac{m^3\alpha^3}{2M_o^3M^3}\left(\vec{S}_0 - \frac{\vec{M}\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)}{M^2}\right); \tag{1.124}$$

Табылған орташа мәндерді ескере отырып, қозғалыс теңдеулері (1) түрінде ұсынылады

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_M\vec{M}\right] \tag{16}$$

мұндағы

$$\vec{\Omega}_M = \frac{m^2\alpha^4}{m_0M^3M_0^3c^2}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)}{7m_0M^2}\vec{S}_0\right\} \tag{17}$$

Енді (2) орташа мәнін есептейік. Бірінші мүшенің орташа мәнін табыңыз

$$\overline{\left(4E + 6mU + \frac{m\xi_o}{m_o}\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2}} = ? \tag{18}$$

Бірінші интеграл

$$\overline{4E\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2}} = \frac{4E}{mc^2}\left[\overline{\vec{\nabla}U\vec{M}}\right] = -\frac{4E\gamma m_o}{mc^2}\left[\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}},\vec{M}\right] =$$

$$= \left|\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^3}dt = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right)d\varphi = 0\right| = 0;$$

(19)

Сол сияқты үшінші интеграл нөлге тең. Екінші интеграл

$$\overline{6mU\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2}} = \frac{6m}{mc^2}\left[\overline{U\vec{\nabla}U\vec{M}}\right] = -\frac{6m_o^2\gamma^2}{c^2}\left[\overline{\frac{\vec{r}}{r^4}},\vec{M}\right] =$$

$$= \left|\overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^4}dt = \frac{m}{TMP}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\varphi)\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right)d\varphi = \frac{\vec{i}e\pi m}{TMP}\right| =$$

$$= -\frac{6e\pi m m_o^2\gamma^2}{TMPc^2}\left[\vec{i},\vec{M}\right] = \frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M^3}\left[\vec{M},\vec{A}\right];$$

(20)

Осылайша, бірінші мүше

$$\overline{\left(4E + 6mU + \frac{m\xi_o}{m_o}\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2}} = \frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M^3}\left[\vec{M},\vec{A}\right]. \qquad (21)$$

Екінші мүшені есептейік:

$$\overline{\frac{2\gamma}{c^2r^3}}\left[\vec{S}_o\vec{A}\right] = \left|\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{dt}{r^3} = \frac{m}{TMP}\int_o^{2\pi}(1+e\cos\varphi)d\varphi = \frac{2\pi m}{TMP}\right| =$$

$$= \frac{4\pi m\gamma}{c^2TMP}\left[\vec{S}_o\vec{A}\right] = \frac{2m^2\alpha^4}{m_oc^2M_o^3M^3}\left[\vec{S}_o\vec{A}\right];$$

(22)

Үшінші мүше

$$\overline{\frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{mc^2r^5}} = \frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)}{mc^2}\left[\overline{\frac{\vec{r}}{r^5}},\vec{M}\right] =$$

$$= \left|\overline{\frac{\vec{r}}{r^5}} = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{\vec{r}}{r^5}dt = \frac{m}{TMP^2}\int_o^{2\pi}\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right)(1+e\cos\varphi)^2d\varphi =\right.$$

$$\left. = \frac{m}{TMP^2}\int_0^{2\pi}2e\vec{i}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{2\pi me\vec{i}}{TMP^2}\right| = \frac{12\pi e\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)}{TMP^2c^2}\left[\vec{i},\vec{M}\right] =$$

$$= -\frac{12\pi\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)}{TMP^2c^2mm_o}\left[\vec{M},\vec{A}\right] = -\frac{6m^2\alpha^4\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)}{m_0c^2M_o^3M^5}\left[\vec{M},\vec{A}\right];$$

(23)

Теңдеудің төртінші мүшесі

$$\overline{\frac{6\gamma S_o^2}{7m_o c^2 r^5}\left[\vec r,\vec M\right]} = \frac{6\gamma S_o^2}{7m_o c^2}\left[\overline{\frac{\vec r}{r^5}},\vec M\right] = \left|\overline{\frac{\vec r}{r^5}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec r}{r^5}\,dt = \frac{2\pi me\vec i}{TMP^2}\right| =$$

$$= -\frac{12\pi\ S_o^2}{7m_o^2 TMP^2 c^2}\left[\vec M,\vec A\right] = -\frac{6m^3\alpha^4 S_o^2}{7m_o^2 c^2 M_o^3 M^5}\left[\vec M,\vec A\right];$$

(24)

Бесінші мүше

$$\overline{\frac{30\gamma}{7m_o c^2 r^7}\left(\vec S_o\vec r\right)^2\left[\vec r,\vec M\right]} = \frac{30\gamma}{7m_o c^2}\left[\overline{\frac{\vec r\left(\vec S_o\vec r\right)^2}{r^7}},\vec M\right] = \left|\overline{\frac{\vec r\left(\vec S_o\vec r\right)^2}{r^7}} =\right.$$

$$= \overline{\frac{\vec r\cdot r^2\left(S_{ox}\cos\varphi + S_{oy}\sin\varphi\right)^2}{r^7}} = \frac{m}{MT}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\vec i\cos\varphi + \vec j\sin\varphi\right)\left(S_{ox}\cos\varphi + S_{oy}\sin\varphi\right)^2}{r^2}d\varphi =$$

$$= \frac{m}{MTP^2}\int_0^{2\pi}\left(\vec i\cos\varphi + \vec j\sin\varphi\right)\left(S_{ox}\cos\varphi + S_{oy}\sin\varphi\right)^2\left(1+e\cos\varphi\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{2em}{MTP^2}\left\{\vec i S_{ox}^2\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi + \left(\vec i S_{oy}^2 + 2\vec j S_{ox}S_{oy}\right)\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\right\} =$$

$$= \left|\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi = \frac{3}{4}\pi;\quad \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4};\right| = \frac{\pi em}{2MTP^2}\left(3\vec i S_{ox}^2 + \vec i S_{oy}^2 + 2\vec j S_{ox}S_{oy}\right)\Bigg| =$$

$$= \frac{15\gamma\,\pi\,e\,m}{7m_o c^2 MTP^2}\left[\left(3\vec i S_{ox}^2 + \vec i S_{oy}^2 + 2\vec j S_{ox}S_{oy}\right),\vec M\right] = \frac{15\,\pi}{7m_o^2 c^2 M^3 TP^2}\times$$

$$\times\left[\left(3\vec A\left(M^2S_o^2 - \left(\vec S_o\vec M\right)^2\right) + 2\left(\vec S\left[\vec M,\vec A\right]\right)\left[\vec M,\vec S_o\right]\right),\vec M\right];$$

(25)

Алтыншы мүше

$$\overline{\frac{12\gamma\left(\vec S_o\vec r\right)\left[\vec S_o\vec M\right]}{7m_o c^2 r^5}} = \frac{12\gamma\left[\vec S_o\vec M\right]}{7m_o c^2}\overline{\frac{\left(\vec S_o\vec r\right)}{r^5}} = \left|\overline{\frac{\vec r}{r^5}} = \frac{2\pi me\vec i}{TMP^2}\right| =$$

$$= \frac{24\gamma\pi\,me\left[\vec S_o\vec M\right]}{7m_o c^2 TMP^2}\left(\vec S_o\vec i\right) = \frac{24\pi\left[\vec S_o\vec M\right]}{7m_o^2 c^2 TMP^2}\left(\vec S_o\vec A\right) = \frac{12m^3\alpha^4\left[\vec S_o\vec M\right]\left(\vec S_o\vec A\right)}{7m_0 c^2 M_o^3 M^5};$$

(26)

Келесі мүше екі өрнекке бөлінеді

$$
\begin{aligned}
&\overline{\frac{12\gamma}{7m_oc^2r^5}(\vec S_o\vec r)[\vec P[\vec r\vec S_o]]} = \overline{\frac{12\gamma}{7m_oc^2r^5}(\vec S_o\vec r)\{\vec r(\vec P\vec S_o)-\vec S_o(\vec r\vec P)\}} = \\
&= \frac{12m\gamma}{7m_oc^2}\frac{\overline{(\vec S_o\vec r)\{\vec r(\vec v\vec S_o)-\vec S_o(\vec r\vec v)\}}}{r^5} = ?
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

Оларды ретімен есептейік

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overline{\vec r(\vec v\vec S_o)(\vec S_o\vec r)}}{r^5} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec r(\vec v\vec S_o)(\vec S_o\vec r)}{r^5}dt = \frac{1}{TP^2}\int_0^{2\pi}(\vec i\cos\varphi+\vec j\sin\varphi)(-\sin\varphi S_{ox}+(\cos\varphi+e)S_{oy})\times \\
&\times(S_{ox}\cos\varphi+S_{oy}\sin\varphi)(1+e\cos\varphi)d\varphi = \frac{e}{TP^2}\int_0^{2\pi}\{\vec i S_{ox}S_{oy}(-\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\cos^4\varphi+\cos^2\varphi)+ \\
&+\vec j((S_{oy}^2-S_{ox}^2)\cos^2\varphi\sin^2\varphi+S_{oy}^2\sin^2\varphi)\}d\varphi = \\
&= \left|\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\pi;\quad \int_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi = \frac{3}{4}\pi;\quad \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\pi;\quad \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\pi}{4};\right| = \\
&= \frac{e}{TP^2}\left\{\vec i S_{ox}S_{oy}\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\vec j\left((S_{oy}^2-S_{ox}^2)\frac{\pi}{4}+S_{oy}^2\pi\right)\right\} = \frac{\pi e}{4TP^2}\{6\vec i S_{ox}S_{oy}+\vec j(5S_{oy}^2-S_{ox}^2)\} = \\
&= \frac{\pi e}{4TP^2}\{6S_{oy}(\vec i S_{ox}+\vec j S_{oy})-\vec j(S_{oy}^2+S_{ox}^2+S_{oz}^2-S_{oz}^2)\} = \frac{\pi e}{4TP^2}\{6S_{oy}(\vec iS_{ox}+\vec jS_{oy}+\vec kS_{oz}-\vec kS_{oz})- \\
&-\vec j(S_{oy}^2+S_{ox}^2+S_{oz}^2-S_{oz}^2)\} = \frac{\pi e}{4TP^2}\left\{6S_{oy}\left(\vec S_o-\frac{\vec M(\vec M\vec S_o)}{M^2}\right)-\vec j\left(S_o^2-\frac{(\vec M\vec S_o)^2}{M^2}\right)\right\};
\end{aligned}
$$

$$(28)$$

Келесі өрнек

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overline{\vec S_o(\vec S_o\vec r)(\vec r\vec v)}}{r^5} = \left|\vec v=\frac{M}{mP}(-\sin\varphi\,\vec i+(\cos\varphi+e)\vec j)\right| = \\
&= \frac{M\vec S_o}{mP}\frac{\overline{(S_{ox}\cos\varphi+S_{oy}\sin\varphi)(-\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi(\cos\varphi+e))}}{r^3} = \\
&= \frac{\vec S_o}{TP^2}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\varphi)(S_{ox}\cos\varphi+S_{oy}\sin\varphi)e\sin\varphi d\varphi = \\
&= \frac{\vec S_o}{TP^2}\int_0^{2\pi}(eS_{ox}\cos\varphi\sin\varphi+eS_{oy}\sin^2\varphi+e^2S_{ox}\cos^2\varphi\sin\varphi+e^2S_{oy}\cos\varphi\sin^2\varphi)d\varphi = \\
&= \frac{\pi\vec S_o}{TP^2}eS_{oy} = \frac{\vec S_oeS_{oy}m\alpha^4}{2M^2M_o^3};
\end{aligned}
$$

$$(29)$$

Нәтижелерді қайта топтастырайық

$$\frac{12m\gamma}{7m_oc^2}\frac{\overline{(\vec{S}_o\vec{r})\{\vec{r}(\vec{v}\vec{S}_o)-\vec{S}_o(\vec{r}\vec{v})\}}}{r^5}=\frac{12m\gamma}{7m_oc^2}\left\{\frac{\pi e}{4TP^2}\{6\vec{i}S_{ox}S_{oy}+\vec{j}(5S_{oy}^2-S_{ox}^2)\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi e\vec{S}_o}{TP^2}S_{oy}\right\}=\frac{3m\pi e\gamma}{7m_oc^2TP^2}\{6\vec{i}S_{ox}S_{oy}+\vec{j}(5S_{oy}^2-S_{ox}^2)-4(\vec{i}S_{ox}S_{oy}+\vec{j}S_{oy}^2+\vec{k}S_{oy}S_{oz})\}=$$

$$=\frac{3m\pi e\gamma}{7m_oc^2TP^2}\{2\vec{i}S_{ox}S_{oy}+\vec{j}(S_{oy}^2-S_{ox}^2)-4\vec{k}S_{oy}S_{oz}\}=$$

$$=\frac{15\gamma\pi e m}{7m_oc^2MTP^2}\left[(3\vec{i}S_{ox}^2+\vec{i}S_{oy}^2+2\vec{j}S_{ox}S_{oy}),\vec{M}\right]=\frac{15\gamma\pi e m}{7m_oc^2TP^2}\left(-3\vec{j}S_{ox}^2-\vec{j}S_{oy}^2+2\vec{i}S_{ox}S_{oy}\right)$$

(30)

Соңғы екі мүше

$$\overline{\frac{12\gamma}{7m_oc^2r^5}(\vec{S}_o\vec{r})[\vec{P}[\vec{r}\vec{S}_o]]}-\overline{\frac{30\gamma}{7m_oc^2r^7}(\vec{S}_o\vec{r})^2[\vec{r},\vec{M}]}=\frac{3m\pi e\gamma}{7m_oc^2TP^2}$$

$$\{2\vec{i}S_{ox}S_{oy}+\vec{j}(S_{oy}^2-S_{ox}^2)-4\vec{k}S_{oy}S_{oz}\}-\frac{15\gamma\pi e m}{7m_oc^2TP^2}\left(-3\vec{j}S_{ox}^2-\vec{j}S_{oy}^2+2\vec{i}S_{ox}S_{oy}\right)=$$

$$=\frac{3m\pi e\gamma}{7m_oc^2TP^2}\{2\vec{i}S_{ox}S_{oy}+\vec{j}(S_{oy}^2-S_{ox}^2)-4\vec{k}S_{oy}S_{oz}+15\vec{j}S_{ox}^2+5\vec{j}S_{oy}^2-10\vec{i}S_{ox}S_{oy}\}=$$

$$=\frac{6m\pi e\gamma}{7m_oc^2TP^2}\{-4\vec{i}S_{ox}S_{oy}+\vec{j}(3S_{oy}^2+7S_{ox}^2)-2\vec{k}S_{oy}S_{oz}\}=\frac{6m\pi e\gamma}{7m_oc^2TP^2}\times$$

$$\times\left\{4S_{ox}(\vec{j}S_{ox}-\vec{i}S_{oy})+3\vec{j}(S_{oy}^2+S_{ox}^2+S_{oz}^2-S_{oz}^2)-2S_{oz}\left(\frac{[\vec{A},\vec{S}_o]}{A}+\vec{j}S_{oz}\right)\right\}=\frac{6m\pi e\gamma}{7m_oc^2TP^2}\times$$

$$\times\left\{4(\vec{A}\vec{S}_o)\frac{[\vec{M}\vec{S}_o]}{MA}+3\frac{[\vec{M},\vec{A}]}{MA}\left(S_o^2-\frac{(\vec{M}\vec{S}_o)^2}{M^2}\right)-2\frac{(\vec{M}\vec{S}_o)}{MA}\left([\vec{A}\vec{S}_o]+\frac{[\vec{M},\vec{A}](\vec{M}\vec{S}_o)}{M^2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{3m^3\alpha^3}{7m_o^2c^2M_o^3M^5}\left\{4(\vec{A}\vec{S}_o)[\vec{M}\vec{S}_o]+3[\vec{M},\vec{A}]S_o^2-5[\vec{M},\vec{A}]\frac{(\vec{M}\vec{S}_o)^2}{M^2}-2(\vec{M}\vec{S}_o)[\vec{A}\vec{S}_o]\right\};$$

(31)

Содан кейін теңдеудің барлық мүшелерін жинай отырып, біз келесі өрнекті аламыз

$$\overline{\frac{d\vec{A}}{dt}} = \frac{3m\alpha^4}{c^2 M_0^3 M^3}\left[\vec{M},\vec{A}\right] + \frac{2m^2\alpha^4}{m_o c^2 M_o^3 M^3}\left[\vec{S}_o\vec{A}\right] - \frac{6m^2\alpha^4\left(\vec{M}\vec{S}_o\right)}{m_0 c^2 M_o^3 M^5}\left[\vec{M},\vec{A}\right] +$$

$$+\frac{6m^3\alpha^4 S_o^2}{7m_o^2 c^2 M_o^3 M^5}\left[\vec{M},\vec{A}\right] + \frac{12m^3\alpha^4\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]\left(\vec{S}_o\vec{A}\right)}{7m_0 c^2 M_o^3 M^5} - \frac{3m^3\alpha^3}{7m_o^2 c^2 M_o^3 M^5}\times \tag{32}$$

$$\times\left\{4\left(\vec{A}\vec{S}_o\right)\left[\vec{M}\vec{S}_o\right] + 3\left[\vec{M},\vec{A}\right]S_o^2 - 5\left[\vec{M},\vec{A}\right]\frac{\left(\vec{M}\vec{S}_o\right)^2}{M^2} - 2\left(\vec{M}\vec{S}_o\right)\left[\vec{A}\vec{S}_o\right]\right\} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right];$$

мұндағы

$$\vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M^3 M_0^3 c^2}\vec{M} + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M^3 M_0^3 c^2}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)}{7m_0 M^2}\vec{S}_0 + \frac{6m\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)^2}{7m_0 M^4}\vec{M}\right\} -$$

$$-\frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0 M^5 M_0^3 c^2}\left\{2\left(\vec{M}\vec{S}_0\right) + \frac{m}{7m_0}S_0^2 - \frac{3m}{7m_0 M^2}\left(\vec{S}_0\vec{M}\right)^2\right\}, \tag{33}$$

Қолданылған әдебиет

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.564 с.
2. Фок В.А. Квантовая физика и философские проблемы // Физическая наука и философия. М.: Наука, 1973. С. 55-77.
3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 1. Теория систем отношений. М.: Изд-во МГУ, 1996. 264 с.
4. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 2. Теория физических взаимодействий. М.: Изд-во МГУ, 1998. 448 с.